www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

Mathématiques II

OPTION GÉNÉRALE OPTION ÉCONOMIQUE · OPTION TECHNOLOGIQUE

Vendredi 4 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques sans formulaire, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

N. B. : OG : Option Générale seule
ET : Options Economique et Techno. Seules

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, on désigne par a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et par φ une fonction numérique continue et strictement croissante sur $[a, b]$, telle que $\varphi(a) \leq 0 \leq \varphi(b)$. On note ω l'unique nombre réel tel que $a \leq \omega \leq b$ et $\varphi(\omega) = 0$.

On appelle évaluation de φ le calcul d'une valeur de φ. L'objet du problème est l'étude de deux types d'algorithmes permettant d'obtenir à partir de l'encadrement initial $a \leq \omega \leq b$ un encadrement plus fin à l'aide d'évaluations successives de la fonction φ.

EG

Dans le cas du premier type (partie III), on fixe une précision et on estime le nombre moyen d'évaluations de φ à effectuer pour obtenir cette précision.

Dans le cas du second type (partie IV), on impose le nombre d'évaluations de φ à effectuer et l'on estime la précision moyenne obtenue.

[ ] = EG

On se propose notamment de montrer que, [pour chacun des deux types] il existe un algorithme optimal, en un sens que l'on précisera.

La partie IV est indépendante des autres.

PARTIE I : Étude d'une fonction

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par les relations :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x \ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la fonction f est continue.
   b) Déterminer la limite de f en 0.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

3. a) Calculer la dérivée de f. Montrer que si $x \neq 1$, le signe de $f'(x)$ est celui de : $g(x) = \ln x - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$
   b) Calculer la dérivée de g et montrer que le signe de $g'(x)$ est celui de : $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$
   c) En remarquant que 1 et -2 sont racines de la fonction polynomiale h, décomposer $h(x)$ en produit de facteurs du premier degré.

4. a) Dresser le tableau de variation de g.
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution t et une seule autre que 1. Vérifier que $\sqrt{2} < t < 2$.

5. a) Dresser le tableau de variation de f.
   b) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

6. *Application.* Pour tout nombre entier $p \geq 2$, on pose : $c_p = \dfrac{(p+2)(p-1)}{p \ln p}$
   Montrer que la suite $(c_p)_{p \geq 2}$ est strictement croissante.

Dans toute la suite du problème, on désigne par p un nombre entier supérieur ou égal à 2.

.../...

PARTIE II : Étude d'une variable aléatoire

1. On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, ..., p-1\}$ et telle que :

$$\begin{cases} P(Z=i) = \dfrac{1}{p} & \text{si } i \neq p-1 \\ P(Z=p-1) = \dfrac{2}{p} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $p = 2$, Z est une variable aléatoire certaine de valeur 1.

a) Calculer l'espérance de Z.

b) Calculer la variance de Z. Contrôler le résultat trouvé en prenant $p = 2$.

2. *Application à l'étude d'un algorithme.* On considère p boîtes $B_1, B_2, ..., B_p$. Un objet Ω est caché dans l'une de ces boîtes ; on cherche à le localiser, c'est-à-dire à déterminer le numéro de la boîte qui le contient, grâce à l'algorithme suivant.

On ouvre successivement les boîtes $B_1, B_2, ..., B_k$ jusqu'à ce que l'une ou l'autre des deux situations suivantes soit réalisée :

- l'objet Ω est découvert ;
- une seule boîte n'a pas encore été ouverte.

On remarque que cet algorithme permet effectivement de localiser l'objet Ω.

On suppose que la boîte dans laquelle est caché Ω a été choisie au hasard, de façon équiprobable, parmi les p boîtes. On note Y la variable aléatoire indiquant le nombre de boîtes ouvertes au cours de la mise en œuvre de l'algorithme. Montrer que Y suit la même loi que la variable aléatoire Z définie dans la question II.1.

En déduire le nombre moyen de boîtes que l'on ouvre pour localiser l'objet.

PARTIE III : Étude d'un premier type d'algorithme

On rappelle que a, b, φ et ω ont été définis dans le préambule.

1. *Algorithme $\mathcal{A}_p$.* On se propose d'étudier un algorithme $\mathcal{A}_p$ permettant d'obtenir à partir d'un encadrement $u \leq \omega \leq v$, où u et v sont des éléments distincts de $[a, b]$, un nouvel encadrement $u' \leq \omega \leq v'$ tel que :

$$u \leq u' \leq \omega \leq v' \leq v \quad \text{et} \quad v' - u' = \frac{v-u}{p} \qquad (1)$$

On définit cet algorithme de la façon suivante. On effectue les évaluations successives :

$$\varphi\left(u + \frac{v-u}{p}\right), \quad \varphi\left(u + 2\frac{v-u}{p}\right), ..., \varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right)$$

jusqu'à ce que l'une ou l'autre des deux situations suivantes soit réalisée :

$$\varphi\left(u + k\frac{v-u}{p}\right) \geq 0 \quad \text{ou} \quad k = p-1$$

Si $\varphi\left(u + k\dfrac{v-u}{p}\right) \geq 0$, on pose : $\begin{cases} u' = u + \dfrac{(k-1)(v-u)}{p} \\ v' = u + \dfrac{k(v-u)}{p} \end{cases}$

Si $\varphi\left(u + k\dfrac{v-u}{p}\right) < 0$, on pose : $\begin{cases} u' = u + \dfrac{(p-1)(v-u)}{p} \\ v' = u + \dfrac{p(v-u)}{p} \end{cases}$

Montrer que les conditions (1) sont effectivement satisfaites.

Suite de l'énoncé option générale : les deux pages suivantes
Suite de l'énoncé options Eco. et Techno : troisième page qui suit

O G

2. *Application répétée de l'algorithme $\mathcal{A}_p$.* Soit ε un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. À partir de l'encadrement initial $a \leq \omega \leq b$, on cherche un encadrement $c \leq \omega \leq d$ tel que $d - c < \varepsilon(b - a)$. À cet effet, on itère l'algorithme $\mathcal{A}_p$ afin d'obtenir les encadrements successifs $a_1 \leq \omega \leq b_1$, $a_2 \leq \omega \leq b_2$,..., $a_n \leq \omega \leq b_n$, où l'encadrement $a_i \leq \omega \leq b_i$ est obtenu à partir de l'encadrement $a_{i-1} \leq \omega \leq b_{i-1}$ par application de l'algorithme $\mathcal{A}_p$. (On convient que $a_0 = a$ et $b_0 = b$.)On arrête les calculs dès que $b_n - a_n < \varepsilon(b-a)$. Ainsi, n est le nombre de mises en œuvre de l'algorithme nécessaires pour obtenir la précision souhaitée.

a) Exprimer $b_i - a_i$ en fonction de $b - a$.

b) Montrer que : $$n = \left[1 - \frac{\ln \varepsilon}{\ln p}\right]$$

Autrement dit, n est la partie entière de $1 - \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln p}$.

3. *Estimation du nombre moyen d'évaluations à effectuer.* Pour évaluer la performance de la méthode décrite dans la question précédente, on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour tout nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, on note Y_i la variable aléatoire indiquant le nombre d'évaluations de φ effectuées au cours de la $i^{\text{ième}}$ mise en œuvre de l'algorithme $\mathcal{A}_p$.

a) Montrer que Y_i suit la même loi que la variable aléatoire Y définie dans la question II.2.

b) On note $V_p(\varepsilon) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ la variable aléatoire qui indique le nombre total d'évaluations de φ effectuées au cours des n mises en œuvre de l'algorithme. Calculer l'espérance, notée $\overline{V_p(\varepsilon)}$, de $V_p(\varepsilon)$.

c) Montrer que, lorsque ε est au voisinage de 0 (l'entier p étant fixé) :

$$\overline{V_p(\varepsilon)} \sim \frac{c_p}{2}(-\ln \varepsilon), \qquad \text{où} \quad c_p = \frac{(p+2)(p-1)}{p \ln p}$$

d) Lorsque ε est suffisamment proche de 0, on assimile $\overline{V_p(\varepsilon)}$ à $\dfrac{c_p}{2}(-\ln \varepsilon)$. En utilisant cette approximation, déterminer la valeur optimale de p, c'est-à-dire celle qui minimise le nombre moyen d'évaluations de φ qu'on doit effectuer dans la procédure décrite dans la question III.2.

PARTIE IV : Étude d'un second type d'algorithme

Dans cette partie, on désigne par q un nombre réel tel que $0 < q < 1$ et par N un nombre entier supérieur ou égal à 2.

1. *Algorithme $\mathcal{B}_q$.* On se propose d'étudier un algorithme $\mathcal{B}_q$ permettant d'obtenir, à partir d'un encadrement $\alpha \leq \omega \leq \beta$, où α et β sont deux éléments distincts de $[a, b]$, un nouvel encadrement $\alpha' \leq \omega \leq \beta'$ tel que :

$$\alpha \leq \alpha' \leq \omega \leq \beta' \leq \beta \qquad \text{et} \qquad \beta' - \alpha' \leq (\beta - \alpha)\sup(q, 1-q) \qquad (2)$$

On définit cet algorithme de la façon suivante. On pose $\gamma = (1 - q)\,\alpha + q\beta$. On calcule $\varphi(\gamma)$.

Si $\varphi(\gamma) \geq 0$, on pose : $\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \beta' = \gamma \end{cases}$

Si $\varphi(\gamma) < 0$, on pose : $\begin{cases} \alpha' = \gamma \\ \beta' = \beta \end{cases}$

Montrer que les conditions (2) sont effectivement satisfaites, en précisant dans chaque cas la valeur de $\beta' - \alpha'$.

.../...

OG

2. *Étude d'une variable aléatoire.* On conserve les notations de la question IV.1. On suppose connu un encadrement $\alpha \leq \omega \leq \beta$ et on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. On note R_q la variable aléatoire prenant la valeur $\beta' - \alpha'$.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par R_q. Examiner le cas où $q = \frac{1}{2}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de R_q.

c) Montrer que l'espérance de R_q est $(2q^2 - 2q + 1)(\beta - \alpha)$.

d) Calculer la variance de R_q en distinguant les cas $q \neq \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$.

3. *Application répétée de l'algorithme $\mathcal{B}_q$.* On itère N fois l'algorithme $\mathcal{B}_q$ afin d'obtenir, à partir de l'encadrement initial $a \leq \omega \leq b$, les encadrements successifs $\alpha_1 \leq \omega \leq \beta_1$, $\alpha_2 \leq \omega \leq \beta_2$,..., $\alpha_N \leq \omega \leq \beta_N$, où l'encadrement $\alpha_i \leq \omega \leq \beta_i$ est obtenu à partir de l'encadrement $\alpha_{i-1} \leq \omega \leq \beta_{i-1}$ par application de l'algorithme $\mathcal{B}_q$. (On convient que $\alpha_0 = a$ et $\beta_0 = b$.)

Pour évaluer la performance de cette méthode, on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. On note T_q la variable aléatoire dont la valeur est $\beta_N - \alpha_N$.

a) Pour tout nombre entier i tel que $1 \leq i \leq N$, on pose :

$$\gamma_i = (1 - q)\,\alpha_{i-1} + q\beta_{i-1}$$

On note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $\varphi(\gamma_i) \geq 0$ et la valeur 0 dans le cas contraire.

Montrer que les variables aléatoires X_i suivent une même loi que l'on précisera.

b) On pose $S_q = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Montrer que S_q suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, q)$.

c) Montrer que si $S_q = k$, alors :

$$\beta_N - \alpha_N = q^k(1 - q)^{N-k}(b - a)$$

En déduire l'ensemble des valeurs que peut prendre T_q. Examiner le cas où $q = \frac{1}{2}$.

On suppose que $q \neq \frac{1}{2}$. Montrer que, pour tout nombre entier naturel k inférieur ou égal à N :

$$P\left(T_q = q^k(1 - q)^{N-k}(b - a)\right) = C_N^k\, q^k(1 - q)^{N-k}$$

d) Calculer l'espérance et la variance de T_q lorsque $q \neq \frac{1}{2}$. Vérifier que les résultats obtenus restent valables lorsque $q = \frac{1}{2}$.

4. *Comparaison des algorithmes $\mathcal{B}_q$.* Montrer que $\frac{1}{2}$ est la valeur de q qui minimise l'espérance de T_q lorque N est fixé et que q parcourt $]0, 1[$. Conclure.

fin de l'enoncé option générale.

ET

Dans toute la suite, on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2.

2. *Application répétée de l'algorithme $\mathcal{A}_p$.* À partir de l'encadrement initial $a \leq \omega \leq b$, on cherche un encadrement $c \leq \omega \leq d$ tel que $d - c < \dfrac{b-a}{m}$. À cet effet, on itère l'algorithme $\mathcal{A}_p$ afin d'obtenir les encadrements successifs $a_1 \leq \omega \leq b_1$, $a_2 \leq \omega \leq b_2, \ldots, a_n \leq \omega \leq b_n$, où l'encadrement $a_i \leq \omega \leq b_i$ est obtenu à partir de l'encadrement $a_{i-1} \leq \omega \leq b_{i-1}$ par application de l'algorithme $\mathcal{A}_p$. (On convient que $a_0 = a$ et $b_0 = b$.) On arrête les calculs dès que $b_n - a_n < \dfrac{b-a}{m}$. Ainsi, n est le nombre de mises en œuvre de l'algorithme nécessaires pour obtenir la précision souhaitée.

a) Exprimer $b_i - a_i$ en fonction de $b - a$.

b) Montrer que :

$$n = \left[1 + \frac{\ln m}{\ln p}\right]$$

(On rappelle que, pour tout nombre réel t, le symbole $[t]$ désigne la partie entière de t, c'est-à-dire le plus grand des nombres entiers relatifs inférieurs ou égaux à t.)

3. *Estimation du nombre moyen d'évaluations à effectuer.* Pour évaluer la performance de la méthode décrite dans la question précédente, on suppose que ω suit une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour tout nombre entier naturel i tel que $1 \leq i \leq n$, on note Y_i la variable aléatoire indiquant le nombre d'évaluations de φ effectuées au cours de la $i^{\text{ième}}$ mise en œuvre de l'algorithme $\mathcal{A}_p$.

a) Montrer que Y_i suit la même loi que la variable aléatoire Y définie dans la question II.2.

b) On note $V_p(m) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ la variable aléatoire qui indique le nombre total d'évaluations de φ effectuées au cours des n mises en œuvre de l'algorithme. Calculer l'espérance, notée $\overline{V_p(m)}$, de $V_p(m)$.

c) On suppose $p \geq m + 1$. Montrer que :

$$\overline{V_p(m)} = \frac{(p+2)(p-1)}{2p}$$

d) En déduire que, pour m fixé, le meilleur choix de p, c'est-à-dire celui qui minimise $\overline{V_p(m)}$, se situe entre 2 et $m + 1$.

4. *Comparaison des deux choix extrêmes* ($p = 2$, $p = m + 1$)

a) Expliciter $\overline{V_2(m)}$ et $\overline{V_{m+1}(m)}$.

b) Déterminer le signe de $\overline{V_2(m)} - \overline{V_{m+1}(m)}$ pour m variant de 2 à 6.

c) Montrer que pour m suffisamment grand : $\overline{V_2(m)} < \overline{V_{m+1}(m)}$.

5. *Comparaison des algorithmes $\mathcal{A}_p$*

a) Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{[x]}{x}$ tend vers 1.

b) L'entier p étant fixé et toujours supérieur ou égal à 2, montrer que, lorsque m tend vers $+\infty$, le rapport $\dfrac{\overline{V_p(m)}}{\ln m}$ tend vers $\dfrac{c_p}{2}$.

c) On prend cette fois $p \geq 3$. Montrer que, pour m suffisamment grand :

$$\overline{V_2(m)} < \overline{V_p(m)}$$

Conclure.

fin de l'énoncé options Economique et Technologique

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail